

基于径向切比雪夫矩函数的 结构动力学模型修正

姜丹丹¹, 臧朝平¹, 梅庆², 卢艳辉²

(1. 南京航空航天大学 能源与动力学院 江苏省航空动力系统重点实验室, 南京 210016;
2. 中国航空工业集团公司 中国航空动力机械研究所, 湖南 株洲 412002)

摘 要: 提出基于径向切比雪夫矩函数的振型描述及模型修正的方法,并应用于实际结构.将结构的模态振型用径向切比雪夫矩特征值表示,可以用很少的数据很好地描述振型数据的特征,实现振型数据的压缩.将径向切比雪夫矩特征值用于相关分析中,克服了利用模态置信准则描述对称结构重模态的缺陷.进一步将径向切比雪夫矩特征值用于模型修正中,克服了将振型数据直接用于修正中会产生的一些问题,如振型数据量过大、修正不易收敛等.以某航空发动机实验器的封油盖为例,进行振动模态测试实验,利用径向切比雪夫矩函数对其进行相关分析及模型修正,修正前后,封油盖有限元的前13阶固有频率的预测值与实际结构模态测试的实验值误差由最大值17.13%降低到1.23%,验证了该方法的有效性.

关 键 词: 径向切比雪夫矩函数; 模型修正; 相关分析; 模态实验; 重模态

中图分类号: V231

文献标志码: A

Model updating in structural dynamics based on radial-Tchebichef moments

JIANG Dan-dan¹, ZANG Chao-ping¹, MEI Qing², LU Yan-hui²

(1. Jiangsu Province Key Laboratory of Aerospace Power System,
College of Energy and Power Engineering,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;
2. China Aviation Powerplant Research Institute,
Aviation Industry Corporation of China, Zhuzhou Hunan 412002, China)

Abstract: Vibration mode shape description and model updating method based on radial-Tchebichef moments was proposed and applied to an actual structure. Radial-Tchebichef moments descriptors were extracted from vibration mode data to describe the most important information of the vibration mode data, realizing the process of data compression. Using radial-Tchebichef moments descriptors in correlation analysis, it overcame the difficulty of double mode when the modal assurance criterion was used to describe the symmetrical structure. It also avoided the problems when vibration mode data was used directly in the process of model updating such as large amount of data and misconvergence of updating parameter. Taking the cover of an aero-engine test rig as an example, the vibration modal test was carried out and radial-Tchebichef moments were used in correlation analysis and model updating. The result shows that the frequency deviation between the test and finite element mod-

收稿日期:2014-08-03

基金项目:国家自然科学基金(11372128,51175244);江苏省高校优势学科建设工程项目;

先进航空发动机协同创新中心项目;中央高校基本科研业务费专项资金(NP2013302,NN2012067)

作者简介:姜丹丹(1989—),女,江苏南通人,硕士生,主要从事结构动力学建模与模型修正方面的研究.

el is reduced from 17.13% to 1.23% after model updating in the first 13 modes and this case verifies the effectiveness of the proposed method.

Key words: radial-Tchebichef moments; model updating; correlation analysis; modal test; double mode

精确的有限元模型可以准确地预测结构的动力学特性,因此在航空航天、汽车、船舶、机械自动化和土木工程领域得到了广泛应用^[1-2].但是,在有限元建模过程中,由于对复杂部位的简化、离散化以及结构物理参数的不确定性,会使其预测的结构动力学特性与实验测试的结构动力学特性之间存在较大的误差.因此,需要利用结构的测试数据对有限元模型进行校准(verification)、相关分析(correlation)和修正(updating)等模型确认(model validation)的过程^[3],从而使有限元预测的结构动力学特性和实验测试的动力学特性两者之间的差异在可接受的范围之内.这样,确认后的模型就可以进一步用于结构的动力学特性预测.按照修正对象的不同,模型修正可分为直接修正方法^[4-5]和间接修正方法^[6-7].利用直接修正法进行模型修正时,需解决测量自由度小于有限元建模离散自由度的问题;此外,由于直接修正法的修正对象为系统的矩阵,结果难以与结构的设计参数关联,不利于工程应用.而间接修正方法的修正对象是结构的设计参数,如几何参数、材料参数等,具有实际的物理意义,故应用较为广泛.目前,应用最广的间接修正方法是基于灵敏度分析的模式修正方法.

相关分析用于评价有限元模型预测的结果与测试模型数据的相近程度,是模型修正及确认中非常重要的一步.传统的相关分析主要利用模态置信准则(modal assurance criterion, MAC),即为有限元模态振型与实测振型夹角的余弦值^[8].MAC值反映的仅是结构模态振型空间描述点上两个数据组的简单对比,不能反映出整个模态振型的特征.此外,在航空发动机中存在大量的轴对称结构,其存在频率相近,振型相似但旋转一定角度的模态,又称重模态.由于转角的存在,使得MAC值对其进行相关分析时受到一定的限制.在模型修正方面,研究表明模态振型数据包含了丰富的振动特性信息,考虑模态振型的修正,会使修正结果更接近实际结构的动力特性.但由于振型信息数据量巨大,对修正参数不敏感等问题,振型数据一般仅用于相关分析阶段,很少直接应用于修正中.

近年来,用于图像处理及模式识别的矩函数方法^[9-11]被引入到结构振动的振型描述与结构动力学相关分析中.Wang等^[12-14]首先将Zernike矩函数、切比雪夫矩函数应用到结构模态振型描述及模型修正中,完成了对圆形、矩形结构的振型矩特征的提取,并对简单的矩形结构进行了模型修正.在国内,刘银超等^[15-17]也对Zernike矩函数及切比雪夫矩函数进行了深入研究,并首次将Zernike矩函数成功应用于航空发动机压气机轮盘的模型修正中.通过矩函数提取出结构模态振型的矩特征值,这些矩特征值代表了结构的振型特征,利用其进行相关分析,将MAC分析中两组空间离散点的数据的简单比较转换为利用模态振型的矩特征值进行对比、分析,结果更具物理意义.同时,对于轴对称结构,由于其存在重模态,在进行振型的矩特征值相关分析时,不受振型转角的影响,可以克服MAC值分析重模态的不足.但是,Zernike矩函数的核函数为连续函数,对离散的图像域进行处理时需要先进行连续函数离散化的过程,这样势必会产生离散误差;除此外,Zernike矩函数只在定义域为 $[0,1]$ 的单位圆中满足正交性,在进行计算时需先将图像的定义域转换到单位圆中,之后才可利用Zernike矩函数进行计算.

本文提出基于径向切比雪夫(radial-Tchebichef, RT)矩函数的振型描述方法,其RT矩函数由一维切比雪夫多项式与三角函数组合而成,核函数为离散函数,在离散图像域内进行计算时,无需进行连续函数离散化的数学过程,不会产生离散误差;在所有图像域中均满足正交性,无需对图像的定义域进行坐标转换处理.同时,RT矩特征值亦满足旋转不变性,与Zernike矩函数一样,适用于处理含有重模态的圆形结构.此外,将模态振型数据用少数RT矩特征值描述并应用到模型修正中,也就是将振型数据最主要的特征应用于修正中,可以大大缩小模型修正矩阵的阶数,提高方程的求解效率.以某航空发动机实验器的封油盖为研究对象,首先通过模态测试获得其前13阶的固有频率及模态振型数据,并建立有限元模型进行计算,之后利用基于RT矩的相关分析与模

态置信准则这两种相关分析方法对实验测试结果与有限元计算结果进行相关分析,最后以实验结果为参考值,对有限元模型进行模型修正。

1 基于 RT 矩函数的模态振型描述

1.1 模态振型的矩特征值提取及振型图像重建

如果将结构的模态振型看作像素为 $N \times N$ 的图像,用 $\psi(r, \vartheta)$ 表示其在极坐标下的模态振型数据,则模态振型图像的 p 阶 q 重 RT 矩特征值 R_{pq} 可以表示为^[18]

$$R_{pq} = \frac{1}{\rho(p, N/2)} \sum_{r=0}^{N/2-1} t_p(r) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m} e^{-jq\vartheta} \psi(r, \vartheta) \quad (1)$$

其中 $\vartheta = 2\pi qk/m$, $t_p(r)$ 为一维 p 阶切比雪夫多项式

$$t_p(r) =$$

$$\frac{p!}{(N/2)^p} \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{N/2-1-k}{p-k} \binom{p+k}{p} \binom{r}{k} \quad (2)$$

其中

$$\rho(p, N/2) = \sum_{r=0}^{N/2-1} [t_p(r)]^2 \quad (3)$$

通过 RT 矩变换,可以从模态振型数据中提取出一系列的 RT 矩特征值,这些特征值构成的模态振型图像的 RT 矩特征值为

$$\mathbf{R} = \{R_{00}, R_{01}, R_{02}, \dots, R_{10}, R_{11}, R_{12}, \dots, R_{pq}\}$$

$$p = 0, 1, 2, \dots, N/2-1; q = 0, 1, 2, \dots, m$$

模态振型图像的 p 阶 q 重 RT 矩特征值 R_{pq} 是个复数, $\text{Re}R_{pq}$ 与 $\text{Im}R_{pq}$ 分别表示 RT 矩特征值的实部与虚部,其具体表达式如下:

$$\begin{aligned} \text{Re}R_{pq} &= C_{pq} = \frac{1}{\rho(p, N/2)} \sum_{r=0}^{N/2-1} t_p(r) \cdot \\ &\sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{1}{m} \psi(r, \vartheta) \cos(q\vartheta) \right] \\ \text{Im}R_{pq} &= D_{pq} = \\ &\frac{1}{\rho(p, N/2)} \sum_{r=0}^{N/2-1} t_p(r) \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{1}{m} \psi(r, \vartheta) \sin(q\vartheta) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

假设将结构模态振型图像绕中心原点旋转一个角度 α , 且图像在旋转过程中保持每个像素点的振动位移值不变, 则旋转后振型图像的 p 阶 q 重 RT 矩特征值为

$$R'_{pq} = R_{pq} e^{-jq\alpha} \quad (5)$$

对于式(5)的复数利用实部与虚部进行描述

$$R_{pq} = C_{pq} - jD_{pq} \quad (6)$$

R_{pq} 幅值为 $|R_{pq}| = \sqrt{C_{pq}^2 + D_{pq}^2}$, 可以看出随着振型图像的旋转其幅值不变化, 即 $|R_{pq}| = |R'_{pq}|$, 也就是说模态振型图像的 RT 矩特征值具有旋转不变性。

利用有限数目的 RT 矩特征值对振型图像进行重建, 其重建公式如下:

$$\begin{aligned} \psi(r, \vartheta) &\cong \sum_{p=0}^{p_{\max}} t_p(r) \text{Re}R_{p0} + \\ &2 \sum_{q=1}^{m/2} \left[\sum_{p=0}^{p_{\max}} t_p(r) \text{Re}R_{pq} \cos(q\vartheta) + \right. \\ &\left. \sum_{p=0}^{p_{\max}} t_p(r) \text{Im}R_{pq} \sin(q\vartheta) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $p_{\max}$ 为用于重建的 RT 矩特征值的最大阶数, $\text{Re}R_{p0}$ 为 $q=0$ 时的 RT 矩特征值的实部值。

1.2 模态振型的矩相关分析

工程实际中最常用的模态相关分析方法为 MAC, 其分析结果被称为振型相关系数, 即 MAC 值, 记为 M , 其定义为

$$M(i, j) = \frac{|\phi_i^e|^T [\phi_j^a]|^2}{([\phi_i^e]^T [\phi_i^e])([\phi_j^a]^T [\phi_j^a])} \quad (8)$$

式中 $[\phi_i^e]$ 表示实验测试的第 i 阶模态振型特征向量, $[\phi_j^a]$ 表示有限元计算的第 j 阶模态振型特征向量, T 代表转置。

仿照模态置信准则的定义, 利用 RT 矩特征值的幅值定义各阶模态振型相关系数为 RT-MAC 值, 记为 M_{RT}

$$M_{\text{RT}}(i, j) = \frac{|[R_i^e]^H [R_j^a]|^2}{([R_i^e]^H [R_i^e])([R_j^a]^H [R_j^a])} \quad (9)$$

式中 $[R_i^e]$ 表示实验测试的第 i 阶模态振型的 RT 矩特征值幅值的向量, $[R_j^a]$ 表示有限元计算的第 j 阶模态振型的 RT 矩特征值幅值的向量, H 代表共轭转置。

MAC 值 RTMAC 值均为 $0 \sim 1$ 之间的一个数, 越接近 1 则表示两个模态振型相关性越高, 若为 0 则表示两者没有相关性。参与相关分析的可以是两个不同类型的模型, 如有限元/实验之间的相关分析, 也可以是相同类型模型间的相关分析, 如实验/实验, 有限元/有限元之间的分析。从定义的表达式可以看出, MAC 值反映的只是模态振型空间离散点上两个数据组的简单对比, 而 RT-MAC 进行相关分析时所利用的 RT 矩特征值为从振型数据中提取出的振型特征, 同时, 由于其存在旋转不变量, 不会受到重模态转角的影响, 因此对振型进行相关分析时所获得的结果更加合理。

2 基于 RT 矩函数的模型修正方法

2.1 模态振型 RT 矩函数的灵敏度

将式(1)在直角坐标系下表示为

$$R_{pq} = \sum_{r=0}^{N/2-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\rho(p, N/2)} t_p(r) e^{-jq\vartheta} \psi(r, \vartheta) = \sum_{r=0}^{N/2-1} \sum_{k=0}^{m-1} V_{pq}(r, \vartheta) \psi(r, \vartheta) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} V_{pq}(x, y) \psi(x, y, \theta) \quad (10)$$

式中 θ 是修正参数。

对于一般的振动问题,由瑞利-李兹法,用 $w(x, y, t)$ 表示结构的振动位移,其表达式为

$$w(x, y, \theta) = \sum_i^n \pi_i(x, y) q_i(t) \quad (11)$$

其中 $\pi_i(x, y)$ 为仅与结构坐标 x, y 有关的变量, n 为自由度, $q_i(t)$ 是关于时间 t 的正弦函数

$$[q_i] = [\phi_i] \sin(\omega t) \quad (12)$$

其中 $[\phi_i]$ 是振型特征向量,将式(12)代入式(11)中,写成矩阵形式如下:

$$w(x, y, \theta) = \pi^T(x, y) \phi(\theta) \sin(\omega t) \quad (13)$$

同理,对于结构振型图像 $\psi(x, y, \theta)$ 可以表示为

$$\psi(x, y, \theta) = \pi^T(x, y) \phi(\theta) \quad (14)$$

对于修正参数 θ ,模态振型的 RT 矩特征值对结构参数的灵敏度 S_R 可以通过下式求解得到:

$$S_R = \frac{\partial R_{pq}}{\partial \theta} = \frac{\partial \left[\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} V_{pq}(x, y) \psi(x, y, \theta) \right]}{\partial \theta} \quad (15)$$

将式(14)代入式(15)可得

$$S_R = \frac{\partial \left[\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} V_{pq}(x, y) \pi^T(x, y) \phi(\theta) \right]}{\partial \theta} = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} V_{pq}(x, y) \pi^T(x, y) \frac{\partial \phi(\theta)}{\partial \theta} \quad (16)$$

可知,模态振型矩函数对待修正参数的灵敏度可由 $\pi(x, y)$ 的 RT 矩特征值与模态振型特征向量 ϕ 对待修正参数的灵敏度得到。

2.2 基于 RT 矩函数灵敏度的模型修正方法

基于 RT 矩函数灵敏度模型修正方法的目标函数通常定义为测试值与预测值的残差,公式表示为

$$\delta R = S_{R,j} \delta \theta \quad (17)$$

其中 $\delta \theta = \theta - \theta_j$ 为修正参数的摄动量, θ_j 是迭代 j 次后的估计修正参数. $\delta R = R_m - R_j$ 为响应残差,

R_m 代表结构实际响应的 RT 矩特征值, R_j 代表在估计参数 θ_j 下响应的 RT 矩特征值. $S_{R,j} = \frac{\partial R_j}{\partial \theta_j}$ 为灵敏度矩阵。

在不考虑加权矩阵的情况下,由式(17)可得下次迭代的修正参数摄动量为

$$\delta \theta = [S_{R,j}^T S_{R,j}]^{-1} S_{R,j}^T \delta R \quad (18)$$

则下次迭代的修正参数为

$$\theta_{j+1} = \theta_j + [S_{R,j}^T S_{R,j}]^{-1} S_{R,j}^T (R_m - R_j) \quad (19)$$

3 实例:某航空发动机实验器封油盖的模型修正

3.1 模态测试及有限元计算

封油盖的实际结构如图 1 所示,在软件 PATRAN 中建立有限元模型如图 2 所示.有限元网格划分采用 Tet10 单元,共划分 11093 个单元,边界条件为自由-自由,在实验中利用海绵垫模拟自由-自由的边界条件.弹性模量为 184 GPa,密度为 7 900 kg/m³,泊松比为 0.24.利用 NAS-TRAN 求解器求得封油盖的前 16 阶固有频率如表 1 所示.由于封油盖的主要振动部位为盖体

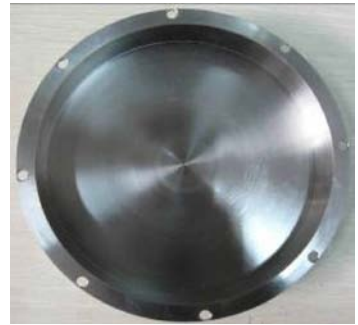


图 1 封油盖结构图

Fig. 1 Photo of cover structure

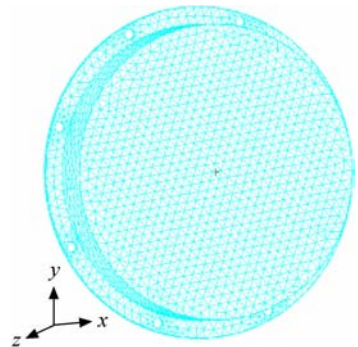


图 2 有限元模型

Fig. 2 Finite element model

表 1 有限元模型的各阶模态固有频率

Table 1 Natural frequencies of finite element model

阶次	频率/Hz	阶次	频率/Hz
1	714.40	9	2258.94
2	714.66	10	2780.27
3	787.41	11	3265.81
4	1471.24	12	3266.38
5	1473.49	13	4065.59
6	2251.54	14	4074.88
7	2253.15	15	4299.76
8	2258.86	16	4325.20

表 2 模态测试的各阶模态固有频率

Table 2 Natural frequencies of the modal test

阶次	频率/Hz	阶次	频率/Hz
1	634.67	8	2452.27
2	642.16	9	2464.95
3	864.28	10	3019.31
4	1617.86	11	3521.61
5	1620.11	12	3526.16
6	1928.52	13	3912.75
7	1953.65		

部分,故模态测试时测点均布置于盖体部分,如图 3 所示,盖体上共布置了 49 个测点,测试模型如图 4 所示.采用锤击激励,测试得到前 13 阶固有频率列于表 2.图 5 为有限元计算结果的振型图像,图 6 为实验测试的振型图像.

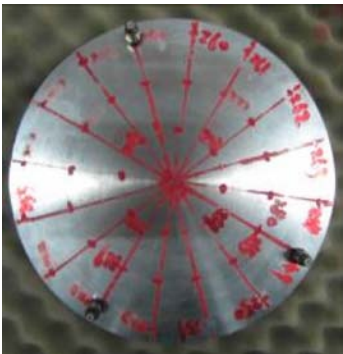


图 3 实验布置图

Fig. 3 Test configuration

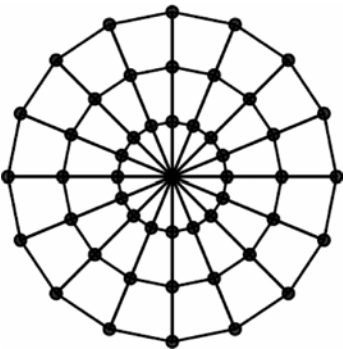
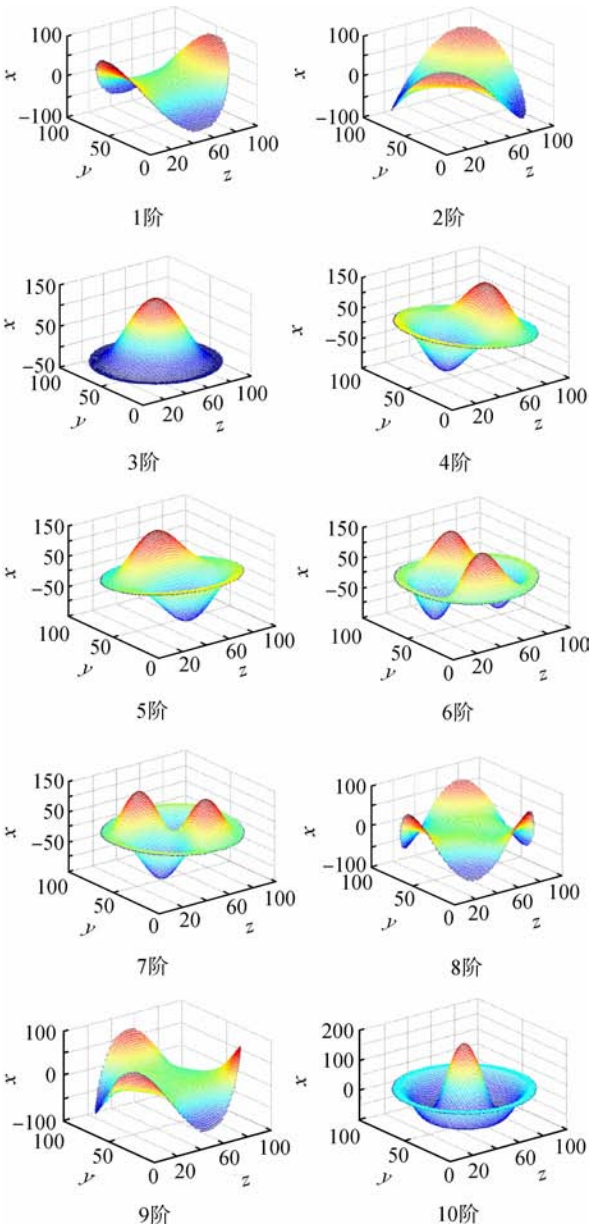


图 4 测试模型

Fig. 4 Test model



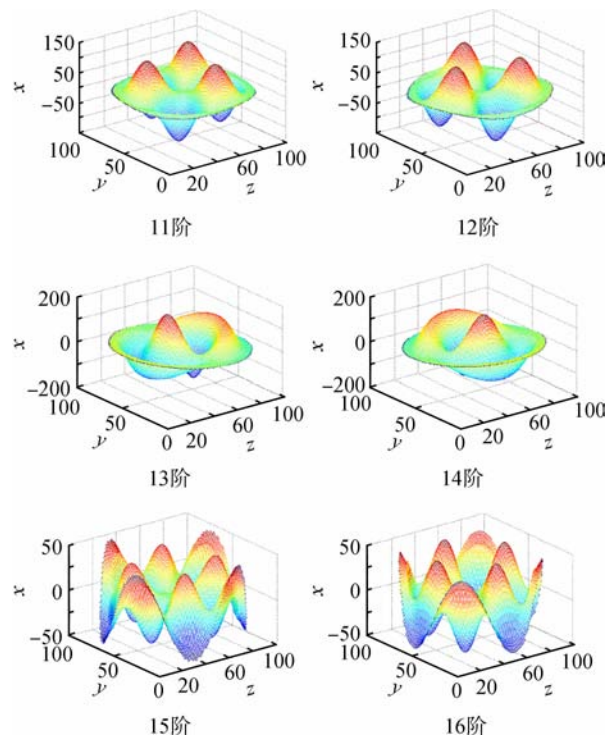


图 5 有限元模型计算结果的振型图像

Fig. 5 Vibration mode shape images of finite element model

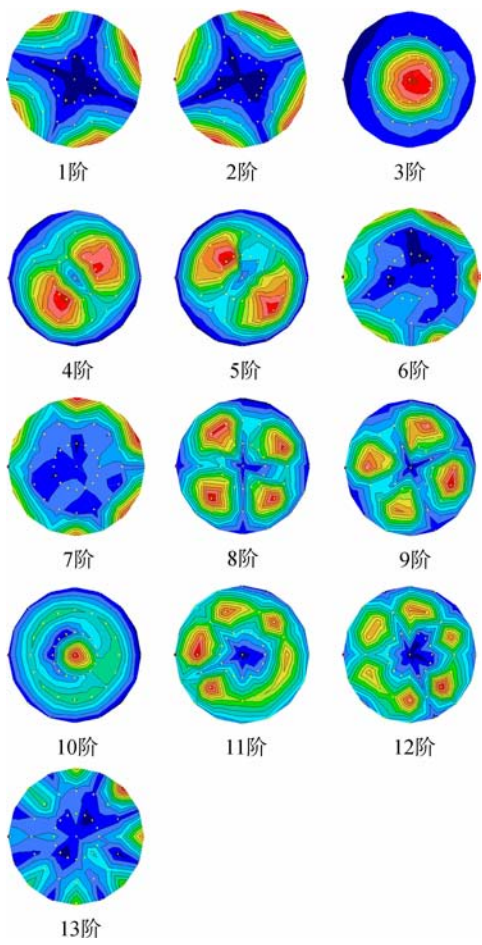


图 6 实验测试的振型图像

Fig. 6 Vibration mode shape images of test

由于 x 方向的振型为主要振动方向,故将振型中的 x 向位移作为灰度值,建立模态测试振型图像,有限元模型的振型图像如图 7 所示,模态测试振型图像如图 8 所示.从表 1、表 2 及图 7、图 8 可以看出,有限元的频率计算结果与实验测得的

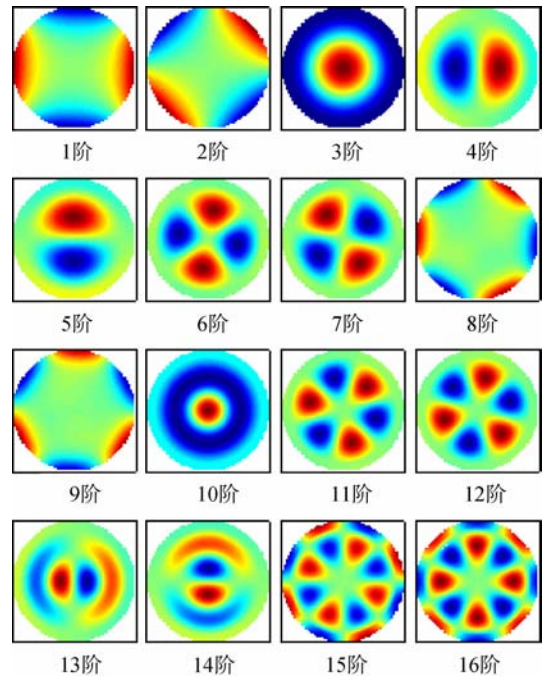


图 7 有限元模型各阶模态振型的灰度图像

Fig. 7 Gray level images of finite element model

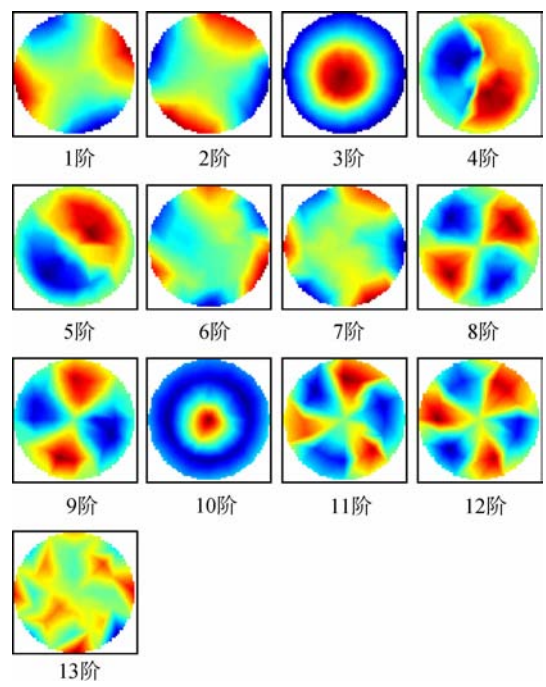


图 8 实验各阶模态振型的灰度图像

Fig. 8 Gray level images of test

频率有较大的差异,且存在模态错阶的问题,如有限元的第 6,7,8,9 阶模态振型.

对于图 7、图 8 的振型图像,利用 RT 矩函数可提取出其 RT 矩特征值. 以前 8 阶模态振型为例,分别对有限元计算结果与实验测试结果进行 RT 矩特征值提取,将其幅值为纵坐标,绘制成柱状图,分别如图 9、图 10 所示. 从结果可以看出,在所列出的 500 个 RT 矩特征值中,起主要贡献的 RT 矩特征值只有少数几个,用这几个 RT 矩特征值就可以对振型图像进行很好的描述. 此外,从图 10 中可以看出,测试结果中有明显多于有限元计算的 RT 矩特征值,它们的幅值很小,对整体没有多少影响. 这是因为在实验中不可避免地会受到一些噪声的影响,这些多余的 RT 矩特征值就是由噪声所引起的. 研究表明,可以通过选择合

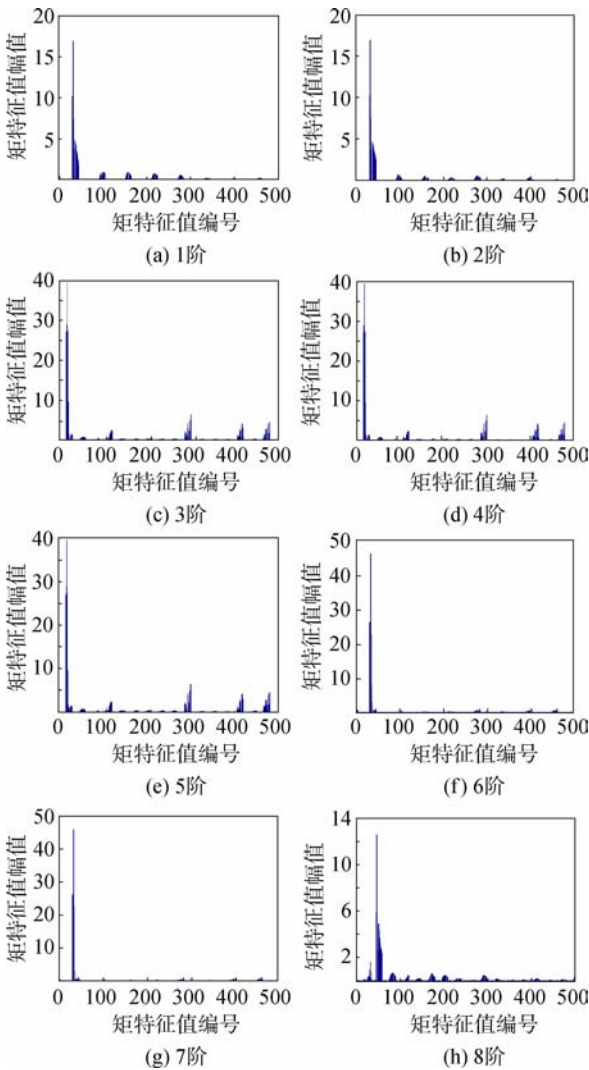


图 9 有限元模型前 8 阶模态的 RT 矩特征值柱状图
Fig. 9 Histogram of RT moments descriptors of the first 8 modes of finite element model

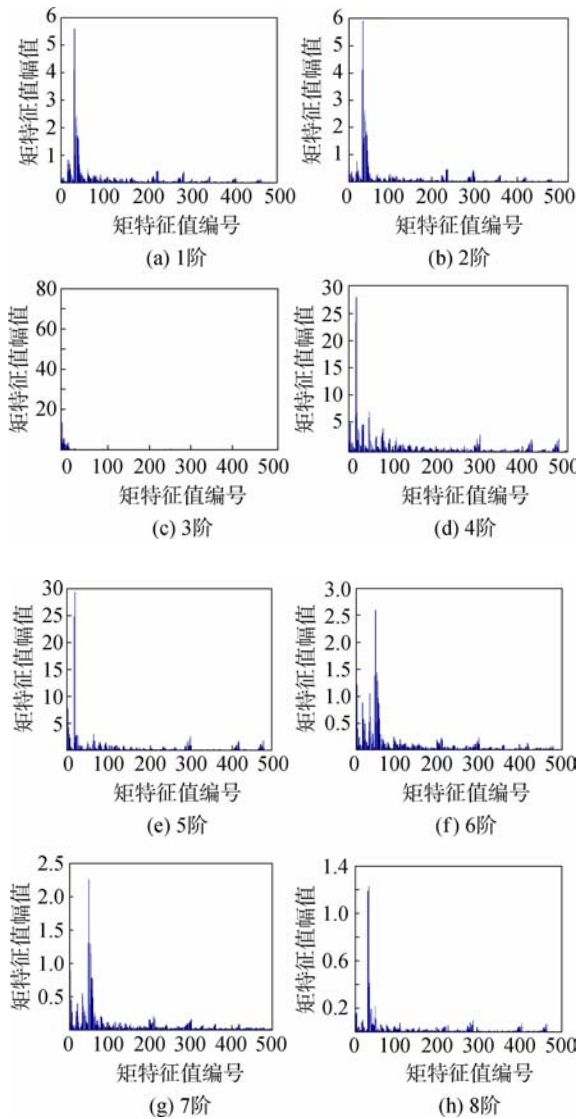


图 10 实验测试前 8 阶模态的 RT 矩特征值柱状图
Fig. 10 Histogram of RT moments descriptors of the first 8 modes of test

适的 RT 矩特征值进行振型图像重建以减弱噪声的影响.

3.2 有限元/实验模态的相关分析

下面将利用 MAC 及基于 RT 矩函数的相关分析(RTMAC),分别分析有限元模型与测试数据的相关性.

图 11~图 14 分别为两种方法得到的有限元计算与实验测试的自相关分析结果. 从图中可以看出,该有限元模型与测试模型的自由度数皆可以很好地描述该封油盖模型. 图 11、图 13 为采用 MAC 计算的振型自相关系数(autoMAC 值,记为 M_a),表明各阶模态和自身有很好的相关性,但第 1 阶与第 2 阶、第 4 阶与第 5 阶、第 6 阶与第 7 阶等均为相近模态对(即重模态),在 autoMAC 图

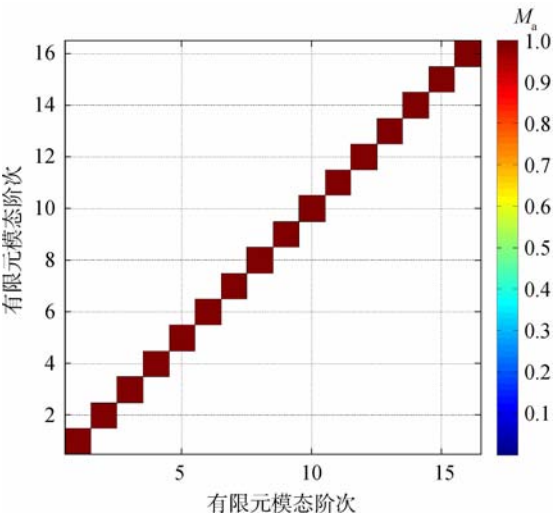


图 11 有限元模型的 autoMAC
Fig. 11 AutoMAC of finite element model

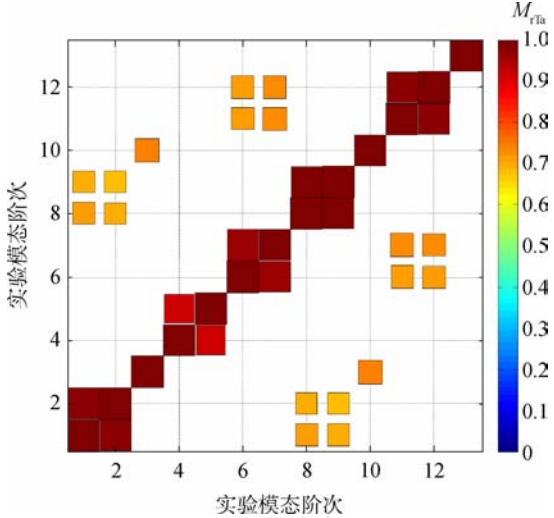


图 14 实验的 autoRTMAC
Fig. 14 AutoRTMAC of test

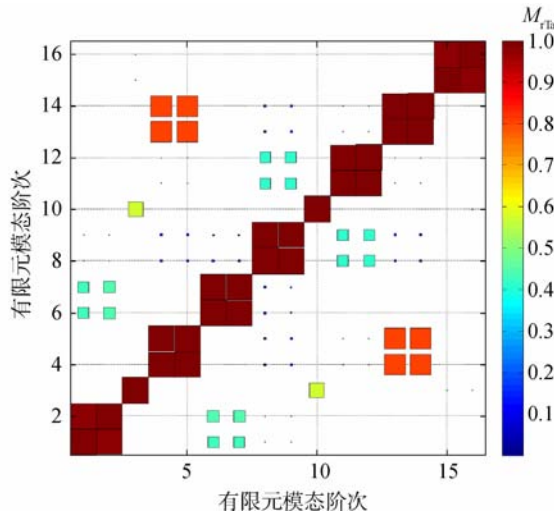


图 12 有限元模型的 autoRTMAC
Fig. 12 AutoRTMAC of finite element model

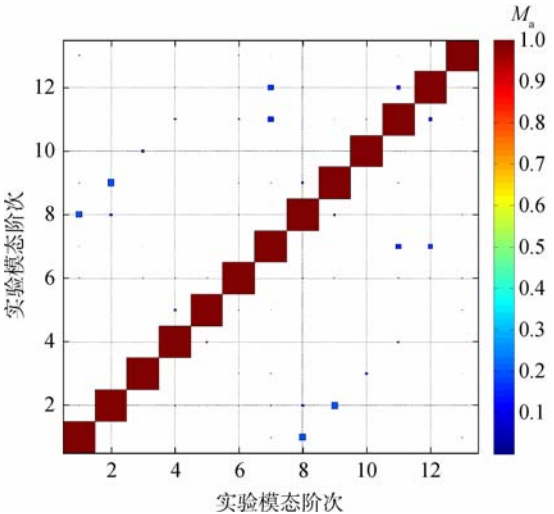


图 13 实验的 autoMAC
Fig. 13 AutoMAC of test

上它们之间的相似度基本为零,无法描述其重模态对特征.图 12、图 14 为基于 RT 矩函数相关分析的振型自相关系数 (autoRTMAC 值,记为 M_{rTa}),图中明显看出 autoRTMAC 值不仅能很好地反映各阶模态自身的相关性(对角线上的 autoRTMAC 值接近 1),还能很好地反映各相近模态对两者之间的相关性(各相近模态对之间的 autoRTMAC 值也接近 1).

分别利用 MAC 和 RTMAC 对有限元/实验进行相关分析,结果如图 15 与图 16 所示.同样,在进行有限元/实验的互相关分析时,MAC 值仍然不能对相近模态对进行很好的描述.同时,由于

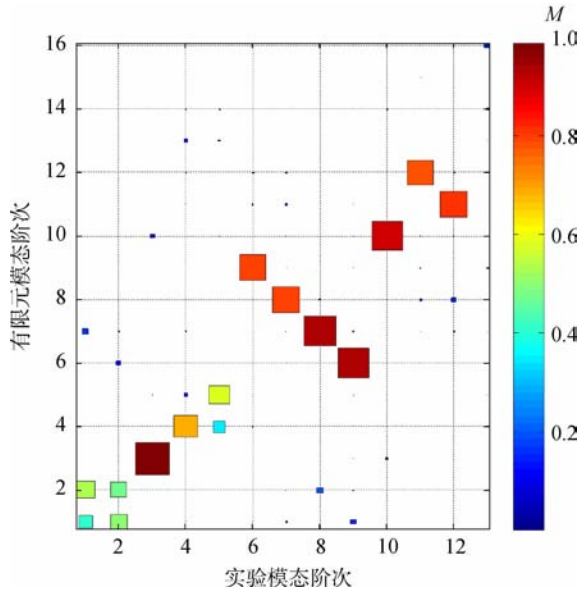


图 15 有限元模型/实验的 MAC
Fig. 15 MAC between finite element model and test

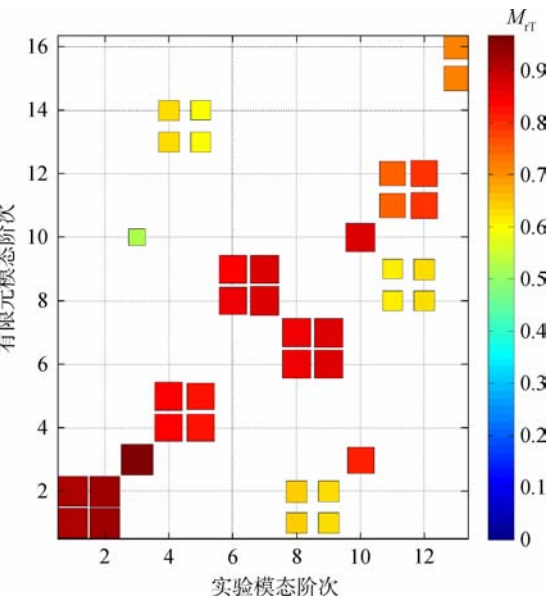


图 16 有限元模型/实验的 RTMAC
Fig. 16 RTMAC bewteen finite element model and test

有限元计算分析与模态测试结果中的第 6,7,8,9 阶模态出现了错阶的情况,导致在非对角线上出现较大的 MAC 值. 与 MAC 值描述不同,RTMAC 值却能很好地描述互相关中有限元模型与测试模型的各相近模态对.

表 3 为互相关分析的列表. 从表中可以看出,

表 3 相关系数及频差分析结果

Table 3 Analysis results of correlation coefficient and frequency deviation

实验阶次	实验频率/Hz	有限元阶次	有限元频率/Hz	频率误差/%	$M_r/\%$	$M_{rt}/\%$
1	634.67	2	714.66	12.60	53.57	91.74
2	642.16	1	714.40	11.25	49.73	91.74
3	864.28	3	787.41	-8.89	98.78	96.81
4	1617.86	4	1471.24	-9.06	68.15	83.74
5	1620.11	5	1473.49	-9.05	57.89	81.92
6	1928.52	9	2258.94	17.13	78.73	84.68
7	1953.65	8	2258.86	15.62	79.88	86.85
8	2452.27	7	2253.15	-8.12	93.83	86.02
9	2464.95	6	2251.54	-8.66	93.00	86.99
10	3019.31	10	2780.27	-7.92	89.98	87.02
11	3521.61	12	3266.38	-7.25	77.84	75.46
12	3526.16	11	3265.81	-7.38	80.84	79.19
13	3912.75	16	4325.20	10.54	16.45	72.05

有限元计算分析与模态测试结果的各阶匹配模态的频差值较大,最大值为 17.13%,最小的也有-7.25%. 利用 MAC 值进行振型相关性描述时,由于相近模态对振型的相互影响,使得 MAC 值相对较低,但利用 RTMAC 进行相关分析后,由于其旋转不变性特征,克服了相近模态对振型转角不同的相互影响,其相关性得到提高,其中第 1 阶与第 2 阶模态提高较为显著.

3.3 基于 RT 矩函数的模型修正

进一步对比有限元模型的预测分析和实际结构测试的误差,主要原因在于有限元建模过程的离散化误差和结构加工过程中的偏差. 图 17 为封油盖实物在安装边处的局部放大图,图 18 为建模时安装边处的局部放大图. 可以看出封油盖实物安装边的孔,加工时是打歪的,且在边缘处即将贯穿,这样的情况不止出现在一个孔处,安装边处的



图 17 实物局部放大图
Fig. 17 Image magnification of the cover

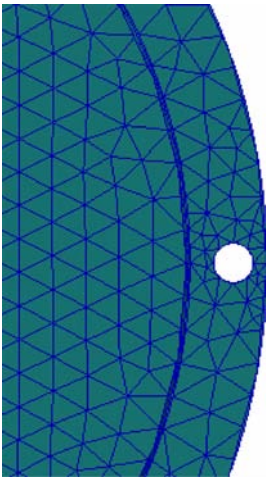


图 18 有限元模型局部放大图
Fig. 18 Image magnification of finite element model

所有孔或多或少都存在打偏的情况. 但是有限元模型所建的孔, 按设计要求在安装边的正中间. 为有限元模型能反映实际结构的动力特性, 利用实际结构的测试数据对有限元模型进行修正. 考虑建模中的误差与实际结构的偏差, 有限元模型的修正区域分为 4 组, 第 1 组为红色部分, 为安装边的非孔区域, 第 2 组为绿色部分, 第 3 组为蓝色区域, 安装边上的有孔区域, 第 4 组为黄色区域, 即盖体部分. 分组的示意图如图 19 所示.

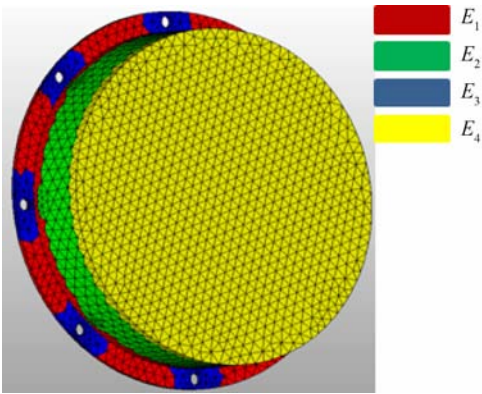


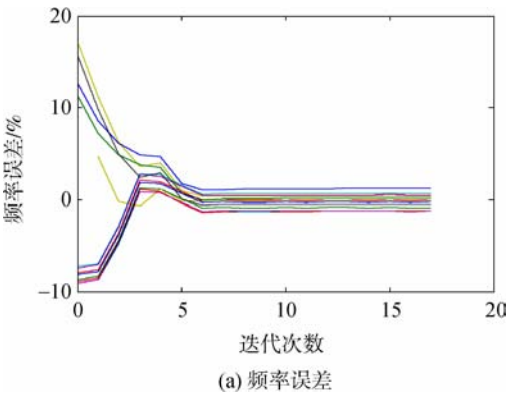
图 19 有限元模型修正区域分组示意图

Fig. 19 Groups of updating areas of finite element model

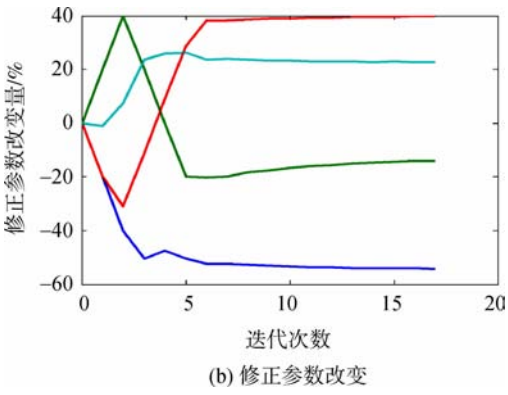
修正时分别对这 4 组的弹性模量进行修正, 以实验的前 13 阶的频率和振型的 RT 矩特征值为参考数据进行修正. 修正过程中各阶频率误差及修正参数改变量随迭代次数变化的曲线如图 20 所示. 迭代 18 次后, 结果收敛, 修正结束. 图 21 为修正后有限元/实验的 RTMAC 图, 从图中可知, 修正后的有限元模型与实验之间不存在错阶问题, 与实验的各阶模态得到较好的匹配. 表 4 为修正前后, 模态频率、有限元模型与结构测试的匹配模态频差、对应的 MAC 值和 RTMAC 值的数值比较. 可以看出, 修正后匹配模态的频差值大幅减小, 最大频差仅为 1.23%, 且大部分频差值的绝对值小于 1%. 另外, 低阶的 MAC 值也有了一定的提高, 说明利用 RT 矩特征值进行修正时考虑了模态振型的影响, 缩小了模态对之间的转角. 可见利用 RT 矩函数进行模型修正是完全可行的.

修正后, 弹性模量的变化如表 5 所示, 第 1 组到第 4 组的弹性模量分别用 $E_1 \sim E_4$ 表示. 修正后, 安装边上的两组弹性模量改变较大, 说明由于孔的位置打偏导致非孔区域的刚度减小; 在有孔区域, 由于孔的位置偏向边缘处, 使得靠近盖体的

部分增加, 孔对其刚度的减小变弱, 使得该区域的刚度增加. 这也与前面所分析的安装边处的孔与



(a) 频率误差



(b) 修正参数改变

图 20 利用 RT 矩特征值和频率进行修正的过程
Fig. 20 Updating process using RT moments descriptors and frequencies data

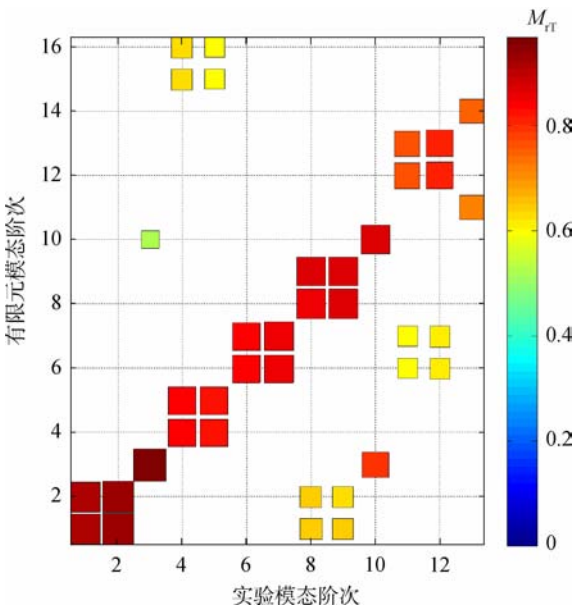


图 21 修正后的有限元模型/实验 RTMAC
Fig. 21 RTMAC between the finite element model and the test after updating

有限元建模有较大误差相一致,第 2 组与第 4 组时的离散误差等效到弹性模量上. 的弹性模量改变较小,可以理解为将有限元建模

表 4 有限元模型修正前后的对比
Table 4 Comparison of before and after finite element model updating

实验 阶次	实验 频率	修正前 阶次	修正前 频率	修正后 阶次	修正后 频率	频率误差/%		M/%		M _{rT} /%	
						修正前	修正后	修正前	修正后	修正前	修正后
1	634.67	2	714.66	1	642.48	12.60	1.23	53.57	78.68	91.74	92.02
2	642.16	1	714.40	2	643.48	11.25	0.21	49.73	76.46	91.74	93.50
3	864.28	3	787.41	3	853.85	−8.89	−1.21	98.78	98.79	96.81	96.91
4	1617.86	4	1471.24	4	1598.17	−9.06	−1.22	68.15	68.48	83.74	84.12
5	1620.11	5	1473.49	5	1600.44	−9.05	−1.21	57.89	58.65	81.92	82.56
6	1928.52	9	2258.94	6	1935.65	17.13	0.37	78.73	55.17	84.68	83.66
7	1953.65	8	2258.86	7	1943.67	15.62	−0.51	79.88	61.24	86.85	85.78
8	2452.27	7	2253.15	9	2445.97	−8.12	−0.26	93.83	94.30	86.02	86.40
9	2464.95	6	2251.54	8	2444.09	−8.66	−0.85	93.00	92.86	86.99	87.43
10	3019.31	10	2780.27	10	3017.49	−7.92	−0.06	89.98	89.94	87.02	86.99
11	3521.61	12	3266.38	13	3544.50	−7.25	0.65	77.84	76.61	75.46	76.85
12	3526.16	11	3265.81	12	3543.99	−7.38	0.51	80.84	82.86	79.19	80.61
13	3912.75	16	4325.20	14	3912.86	10.54	0	16.45	80.70	72.05	74.44

表 5 修正参数的对比 Table 5 Comparison of updating parameters			
修正参数	修正前	修正后	改变量/%
E ₁ /GPa	184	84.4	−54.13
E ₂ /GPa	184	158	−14.13
E ₃ /GPa	184	257	39.67
E ₄ /GPa	184	226	22.83

4 结 论

本文利用 RT 矩函数提取模态振型图像的 RT 矩特征值,对振型图像进行描述,实现了振型数据的压缩,并进一步利用 RT 矩特征值进行相关分析及模型修正,避免了直接将振型数据用于修正时所产生的修正参考数据量过大,修正不易收敛等问题.为验证该方法的可行性,对某航空发动机实验器的封油盖进行有限元建模计算及模态测试实验,对其进行相关分析及模型修正,取得了较好的结果,修正后的频差由原来的最大值 17.13%降低到修正后的 1.23%.修正后也不存

在错阶问题,修正效果明显.将图像处理领域中的 RT 矩函数引入到结构动力学模态振型描述、相关分析及模型修正中,是对传统动力学模型确认理论的拓展.

参考文献:

[1] Mottershead J E, Link M, Friswell M I. The sensitivity method in finite element model updating: a tutorial[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2011, 25(7): 2275-2296.

[2] Brownjohn J M W, Xia P Q. Dynamic assessment of curved cable-stayed bridge by model updating [J]. Journal of Structural Engineering, 2000, 126(2): 252-260.

[3] Zang C, Ewins D J. Model validation for structural dynamics in the aero-engine design process[J]. Frontiers of Energy and Power Engineering in China, 2009, 3(4): 480-488.

[4] Berman A. Mass matrix correction using an incomplete set of measured modes[J]. AIAA Journal, 1979, 17(10): 1147-1148.

[5] Baruch M. Optimal correction of mass and stiffness matrices using measured modes [J]. AIAA Journal, 1982, 20(11): 1623-1626.

[6] Mares C, Mottershead J E, Friswell M I. Results obtained by minimising natural-frequency errors and using physical

reasoning[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2003, 17(1): 39-46.

[7] Zapico J L, Gonzalez M P, Friswell M I, et al. Finite element model updating of a small scale bridge[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 268(5): 993-1012.

[8] Allemang R J, Brown D L. A correlation coefficient for modal vector analysis[C]// Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference. Orlando: Society for Experimental Mechanics, 1982: 110-116.

[9] Mukundan R. Radial Tchebichef invariants for pattern recognition[C]// Proceedings of Institute of Electrical and Electronics Engineers Region Ten Conference. Melbourne, Australia: IEEE, 2005: 1-6.

[10] Mukundan R, Ong S H, Lee P A. Image analysis by Tchebichef moments[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(9): 1357-1364.

[11] Chong C W, Raveendran P, Mukundan R. Translation invariants of Zernike moments[J]. Pattern Recognition, 2003, 36(8): 1765-1773.

[12] Wang W, Mottershead J E, Mares C. Mode-shape recognition and finite element model updating using the Zernike moment descriptor[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, 23(7): 2088-2112.

[13] Wang W, Mottershead J E, Ihle A, et al. Finite element model updating from full-field vibration measurement using digital image correlation[J]. Journal of Sound and Vibration, 2011, 330(8): 1599-1620.

[14] Wang W, Mottershead J E, Mares C. Vibration mode shape recognition using image processing[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 326(3): 909-938.

[15] LIU Yinchao, ZANG Chaoping. Mode shape description of an aero-engine casing structure using Zernike moment descriptors[J]. Journal of Aerospace Power, 2011, 26(4): 760-770.

[16] 刘银超, 臧朝平. 对称结构模态振型的 Zernike 矩描述方法[J]. 振动工程学报, 2011, 24(4): 369-375.

LIU Yinchao, ZANG Chaoping. Mode shape description of a symmetrical structure using Zernike moment descriptor[J]. Journal of Vibration Engineering, 2011, 24(4): 369-375. (in Chinese)

[17] 贾晴晴, 刘银超, 臧朝平. 结构模态振型的 Tchebichef 矩描述方法[R]. 哈尔滨: 中国力学大会暨钱学森诞辰 100 周年纪念大会, 2011.

[18] Mukundan R. A comparative analysis of radial-Tchebichef moments and Zernike moments[R]. London: British Machine Vision Conference, 2009.

(编辑: 陈 越)